FRECCE: DIRITTE AL BERSAGLIO

Il problema balistico considerato mettendo in primo piano il ruolo della freccia

di Mario e Riccardo Ostidich

(Testo pubblicato in OUTLAB nel giugno 2007)

La freccia non è un proiettile avviato nella sua traiettoria percorrendo la canna di un'arma che vincola la sua direzione. Ha tutta la libertà e mille motivi per disorientarsi. Un quarto della massa è collocata all'estremità opposta della spinta. Subisce accelerazioni che in poco più di quindici millisecondi portano a velocità dell'ordine dei duecento chilometri orari. E' elastica e può flettersi. E' disturbata dal contatto con l'impugnatura dell'arco.

La sola opportunità che abbiamo per ridurre l'imprevedibilità del risultato è quella di creare condizioni in cui tutto avvenga il più possibile nello stesso modo. Questo è il motivo per cui il tiro con l'arco è un vero gesto atletico, che richiede massima conoscenza dell'attrezzo e perfetta ritualità dell'azione.

I PARAMETRI DELLA FRECCIA

Ogni arciere sa d'avere bisogno di frecce che siano selezionate in funzione del proprio arco e del proprio allungo. Prendiamo in considerazione frecce da 74 centimetri che debbano essere scoccate da un arco ricurvo da 50 libbre. Si può valutare che un arco di questo genere disperda energia in quantità equivalente ad una massa virtuale di 12 grammi. Le **tabelle Easton** consiglierebbero aste 2114. Questa sigla commerciale indica dimensioni da intendere come misure in pollici, per un diametro esterno di 21 sessantaquattresimi ed uno spessore di 14 millesimi. Si tratta di aste in lega d'alluminio.

Anche le leghe sono catalogate con un numero, secondo norme d'uso internazionale. Supponiamo di scegliere la 2024. Consultando un prontuario tecnico possiamo conoscere la densità, il modulo d'elasticità e il carico specifico limite. Immaginiamo infine di completare la freccia con una punta NIBB 9%, tre alette PVC da quattro pollici ed una cocca standard. I rispettivi pesi sono ricavabili dal catalogo dei fornitori. Facciamo poi qualche conteggio complementare e tabuliamo tutti i parametri a disposizione. Alcune delle unità di misura che abbiamo utilizzato possono apparire scomode, ma sono quelle più coerenti per essere usate con le formule che seguono in questo testo.

▪ Libbraggio dell'arco (ricurvo 50#)	T_a	= 50 ·4,45	222,5	N
▪ Massa virtuale dell'arco	m_v		0,013	kg
▪ Lunghezza della freccia	L_f		0,740	m
▪ Diametro esterno dell'asta 2114	$ø_e$	= 21 ·25,4 / 64	0,00833	m
▪ Spessore dell'asta 2114	s	= 14 ·25,4 / 1000	0,000356	m
▪ Diametro interno dell'asta	$ø_i$	= $ø_e$ – 2·s	0,00762	m
▪ Densità lega 2024	ρ		2770	kg/m^3
▪ Modulo d'elasticità lega 2024	E		$73x10^9$	N/m^2

▪ Carico limite d'elasticità lega 2024	R_p		$310x10^6$	N/m^2
▪ Momento d'inerzia dell'asta	J	$= \pi \cdot (ø_e^4 - ø_i^4) / 64$	$71,1x10^{-12}$	m^4
▪ Massa dell'asta	m_a	$= L_f \cdot \rho \cdot \pi \cdot (ø_e^2 - ø_i^2) /4$	0,0183	kg
▪ Massa della punta NIBB 9%	m_p		0.0064	kg
▪ Massa di tre alette PVC 4"	m_t		0,0023	kg
▪ Massa della cocca	m_c		0,0008	kg
▪ Massa totale della freccia	m_f	$= ma + m_p + m_i + m_c$	0,0277	kg

Per le **norme AMO**, la lunghezza della freccia è misurata dal solco della cocca fino all'estremità opposta dell'asta. Il tipo di punta montata sulla freccia non incide quindi sulla determinazione della lunghezza

Abbiamo così completato lo schema di riferimento necessario per esplorare la complessità delle forze che agiscono sulla nostra freccia, ponendoci l'obiettivo di conoscere ciò che può aiutarla ad andare diritta al bersaglio.

SPINE E FLESSIBILITA' DELL'ASTA

Le specifiche tecniche delle aste prodotte negli Stati Uniti ci hanno abituato ad esprimere la flessibilità di una freccia in termini di **spine**. Questa è una grandezza empirica, ottenuta misurando in millesimi di pollice la flessione che l'asta della freccia subisce quando viene appoggiata alle estremità e caricata al centro con un carico di circa due libbre. Per le aste di legno, che sono le uniche prese in considerazione dai vecchi standard AMO, si usa tuttora fare misure sulla distanza di 26 pollici (~654mm) con un carico di 2 libbre esatte (907 g). Ma per le aste d'alluminio le nuove norme prescrivono che l'asta sia appoggiata a 28 pollici di distanza (~711 mm) e abbia un carico di 1,94 lb (880 g). E' ragionevole pensare che la riduzione di 20 grammi sia stata decisa per compensare il peso stesso dell'asta che contribuisce alla flessione.

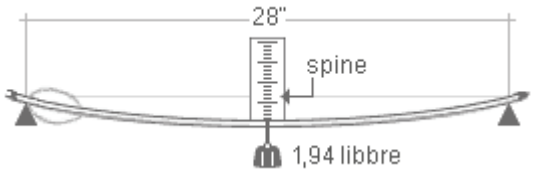


Fig.1 - Metodo di misura dello spine

Consultando le tabelle Easton possiamo trovare che l'indice di spine della nostra asta dovrebbe essere attorno a 500. Questo valore può essere calcolato con sufficiente facilità utilizzando una delle formule che si possono trovare sui manuali di calcolo delle strutture:

(1) $f = Q \cdot L^3 / (48 \cdot E \cdot J)$

E' utile notare come la formula utilizza i parametri del modulo d'elasticità **E** che esprime la rigidità del materiale, e del momento d'inerzia **J** che esprime la rigidità di forma della sezione. Il parametro **L** è la distanza tra i punti d'appoggio (0,711 metri). Per un calcolo esatto dobbiamo tenere conto che il carico **Q** deve essere maggiorato del peso dell'asta per una lunghezza uguale alla distanza tra gli appoggi:

$Q = 880g + m_f \cdot 0,711/L_f = 898g = 8,8$ newton.

I calcoli dicono che la flessione **f** è 12,7 millimetri, equivalenti a 500 millesimi di pollici: cioè esattamente il valore dello spine indicato dalle tabelle. Potrebbe essere ora interessante sapere qual'è la massima flessione che la nostra freccia è in grado

di sopportare. Per questo occorre calcolare il carico specifico di trazione **σ** sostenuto dall'elemento della sezione maggiormente sollecitato, cioè quello più lontano dall'asse neutro. Affinché l'asta non si deformi, la sollecitazione **σ** deve essere minore del carico limite $\mathbf{R}_p$ che il materiale è in grado di sostenere elasticamente. Nel caso di un tubo tondo, come l'asta della nostra freccia, valgono questi calcoli:

(2a) $\sigma = Q \cdot L \cdot \varnothing_e / (8 \cdot J)$

e quindi :

(2b) $Q_{max} = 8 \cdot J \cdot R_p / (L \cdot \varnothing_e)$

(2c) $f_{max} = Rp \cdot L^2 / (6 \cdot E \cdot \varnothing_e)$

Facendo il conto per l'intera lunghezza della freccia, risulta che occorre un carico $\mathbf{Q}_{max}$ di oltre 28 newton (cioè: un carico di quasi 3 kg) per raggiungere la flessione massima $\mathbf{f}_{max}$ di 46,5 millimetri, oltre alla quale l'asta è destinata a subire deformazioni permanenti.

Abbiamo detto che la nostra freccia è in lega 2024. Aste più pregiate sono in lega 7075. Le differenze tra i due materiali sono quelle indicate in questa seguente.

lega		2024	7075	
densità	ρ	2770	2800	kg/m^3
modulo d'elasticità	E	$73x10^9$	$72x10^9$	N/m^2
carico limite d'elasticità	R_p	$310x10^6$	$470x10^6$	N/m^2

Se avessimo scelto la lega 7075 la nostra freccia avrebbe pesato 0,2 grammi in più, sarebbe stata più flessibile avendo spine uguale a 521, ma soprattutto avrebbe sostenuto una flessione maggiore: 71 millimetri.

Ricapitolando i risultati di questi conteggi, riteniamo che sia opportuno mettere in evidenza che:

- il valore dello spine dipende dalla sezione dell'asta, dalla sua lunghezza e dal materiale con cui è fatta
- la scelta dello spine ottimale deve tenere conto del libbraggio dell'arco, del fatto che sia un ricurvo o un compound, dell'eventuale let-off, dell'eventuale utilizzo dello sgancio meccanico, della rigidità della corda, del tipo di punta montata sulla freccia
- lo stesso spine può essere ottenuto da un'asta più leggera se ha diametro esterno maggiore e spessore adeguatamente ridotto
- l'impiego della lega 7075 non migliora il volo della freccia, ma offre più resistenza alla deformazione.

VELOCITA', ACCELERAZIONE E CARICO DI PUNTA

Gli archi ricurvi offrono mediamente un **rapporto energia/carico Y** di 0,27 J/N. Quindi il nostro arco da 50# (222 N) dovrebbe disporre di un'energia accumulata $\mathbf{W}_a$ prossima a 60 joule. Parte di questa energia è dispersa dalla massa virtuale dell'arco. L'energia trasmessa alla freccia, calcolata con la formula (3), é poco meno di 41 joule, mentre la velocità iniziale della freccia, calcolata con la formula (4) è di 54 metri al secondo.

(3) $W_f = W_a \cdot m_f / (m_f + m_v)$
(4) $V_f = (2 \cdot W_f / m_f)^{½}$

dove:
W_a = l'energia accumulata dall'arco
W_f = l'energia cinetica della freccia
m_f = la massa della freccia
V_f = velocità iniziale della freccia
m_v = massa virtuale dell'arco

La spinta prodotta dall'arco genera un'**accelerazione a** che, per un arco ricurvo, è massima nell'attimo in cui la mano dell'arciere lascia la freccia. Con i nostri parametri, l'accelerazione iniziale, calcolata con la formula (5), è di 5470 m/s^2.

(5) $a_{max} = T_a / (m_f + m_v)$

Ciò equivale a quasi seicento volte l'accelerazione di gravità, con conseguenti reazioni inerziali che la freccia deve essere in grado di sostenere.

La sollecitazione che agisce lungo l'asse principale di un corpo, è detto **carico di punta**. E' una sollecitazione diversa dalle altre condizioni che comportano una flessione proporzionale al carico. Qui, al contrario, il carico diminuisce quando più elevata è flessione. Quindi, possiamo solo stimare il carico massimo che la nostra freccia sopporterebbe prima di flettere, sapendo che carichi superiori sono destinati a schiantarla istantaneamente. Il calcolo teorico prevede formule diverse in funzione del grado di snellezza della barra sollecitata. Nel nostro caso può andare bene la cosiddetta formula di Eulero, dove $\mathbf{Q}_c$ è il carico critico espresso in newton:

(6) $Q_c = \pi^2 \cdot E \cdot J / L^2$

Per la nostra freccia, i calcoli danno un **carico critico** uguale a 93,5 newton. Dal punto di vista statico, i 222 newton determinati dai 50# di libbraggio sono abbondantemente sufficienti a schiantare la freccia, se questa restasse in qualche modo intrappolata nell'arco, ma in normali condizioni dinamiche, l'asta deve sostenere soltanto l'inerzia rappresentata dalla massa della punta.

(7) $Q_p = m_p \cdot a_{max}$

In realtà la punta NIBB entra nell'asta per qualche centimetro, contribuendo alla sua rigidità. Ma saremmo in sicurezza anche con la medesima massa concentrata all'estremità. Infatti, l'inerzia di 35 newton, calcolata con la formula (7), rappresenterebbe meno della metà del carico critico sostenibile dalla freccia. Un'ulteriore verifica è quella che possiamo ottenere calcolando il carico critico della metà posteriore della freccia, contrapposta ad una inerzia che include anche la massa della metà anteriore dell'asta. Dimezzando la lunghezza troviamo che il carico critico sale a 374 newton, a fronte di un'inerzia di 87 newton. Tutto bene quindi: la nostra freccia non dovrebbe avere problemi.

Chi avesse visto il film in cui Rambo andava all'attacco di mezzi blindati lanciando granate con un compound, potrebbe domandarsi quale effettiva intensità di fuoco potesse avere a disposizione. Correlando le formule (5), (6) e (7) si può calcolare che la massa utilizzabile sulla punta non dovrebbe superare i 30 grammi. Meno di una cartuccia da caccia. Non tanto da far paura ad un blindato.

OSCILLAZIONI ELASTICHE

Le argomentazioni che abbiamo svolto potrebbero portarci a concludere che la freccia non subisca alcuna flessione e che il suo volo possa essere studiato come se

si trattasse di un corpo rigido. Ma non è così. Osservando al rallentatore i filmati girati con apparecchiature ultrarapide – strumenti in grado di scattare un migliaio di fotogrammi al secondo – si può costatare che nell'arco in azione non vi è nulla che resti rigido. Persino un'impugnatura metallica vibra come se fosse una gelatina.

Quindi le frecce flettono e solo l'interferenza tra le **oscillazioni elastiche** della freccia e quella dell'arco può spiegare la circostanza nota a tutti gli arcieri per la quale, a parità d'altre condizioni, le frecce di bassa rigidità tendono ad andare a destra, mentre quelle più rigide deviano a sinistra. E' su queste premesse che Robert P. Elmer negli anni trenta ha coniato l'ipotesi del cosiddetto **paradosso dell'arciere**, un'argomentazione affascinante che sembra volere accreditare all'arco e alla freccia una propria intelligenza, costituita all'insaputa dell'uomo.

Secondo questa congettura, la flessione della freccia, invece d'essere dannosa, sarebbe addirittura propizia ai fini della precisione del tiro. Nel momento dello sgancio, la corda slitterebbe attorno alla punta delle dita, innescando un'oscillazione della freccia rispetto al proprio asse. La fig.2 mostra come, nell'ipotesi più favorevole, l'oscillazione permetterebbe alla freccia di aggirare l'impugnatura dell'arco, evitando urti che ne compromettono la traiettoria. Affinché questo avvenga, occorre che la freccia completi un'oscillazione nel tempo che impiega ad uscire dall'arco. Questo spiega il motivo per cui le frecce debbano avere una rigidità accuratamente selezionata in funzione dell'arco con cui sono scagliate.

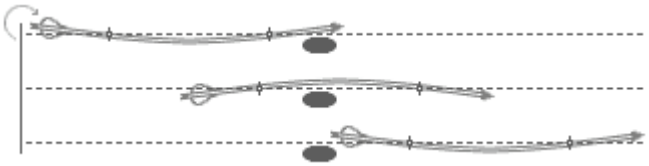


Fig.2 - Ipotesi di oscillazione della freccia

La frequenza d'oscillazione di una barra, come quella di un pendolo, non dipende dalla sollecitazione esterna o dall'intensità del movimento, ma è condizionata solo dalle proprie dimensioni e dalla rigidità. Per un tubo tondo a sezione costante, libero da vincoli, si può ritenere che valga la formula (8), diversa ma coerente con quella che G.A. Pignone ha proposto per le frecce non cave di legno in "L'arco, una macchina perfetta", Ed.Olimpia, 1992:

(8) $t_f = \pi \cdot [(m \cdot L^3) / (48 \cdot E \cdot J)]^{½}$

dove $\mathbf{t}_f$ è il periodo dell'oscillazione misurato in secondi, mentre **m** e **L** sono la massa e la lunghezza da prendere in considerazione.

Con i parametri della nostra freccia, la formula (8) fornisce un tempo di oscillazione di 21 millisecondi, del tutto coerente con i 15–20 millisecondi che la freccia normalmente impiega ad uscire dall'arco. E' un risultato che sembra dare piena credibilità alla congettura descritta in Fig.2. Occorre però considerare che in realtà l'asta non è del tutto libera da vincoli ed è ragionevole supporre la presenza di oscillazioni armoniche secondarie.

Questi argomenti danno avvio ad altre perplessità ancora più critiche:

- il paradosso è stato proposto per archi tradizionali non "finestrati": vale anche per gli archi moderni con l'impugnatura scavata in modo che l'asse della freccia sia allineata con il piano d'azione della corda?

- l'ancoraggio moderno con le dita posate sul viso, e soprattutto lo sgancio meccanico, possono dare alla corda spazio per muoversi lateralmente?
- l'aggancio della corda con il pollice dovrebbe invertire l'oscillazione iniziale e quindi esigere che la freccia sia messa alla parte opposta dell'arco, ma perché gli ottimi arcieri mongoli non ne sentono la necessità?

vedere schede: www.outlab.it/sk0104.htm e www.outlab.it/sk0505.htm

Con l'evidenza fornita da qualche filmato si possono ipotizzare versioni del paradosso più complesse di quella classica. La progressione proposta in Fig.3 si riferisce ad un arco tradizionale dove l'assenza della finestra nell'impugnatura comporta incongruenze di allineamento.

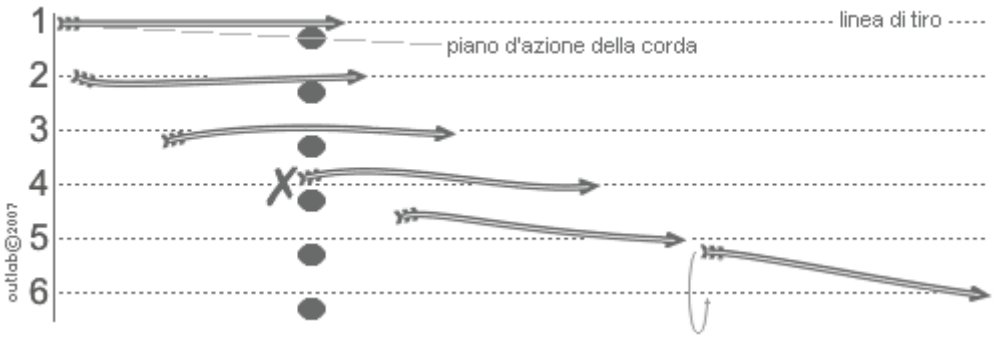


Fig.3 - Versione evoluta del paradosso dell'arciere

Le sequenza delle fasi può essere così sinteticamente descritta:

1. la freccia, ancora trattenuta dall'arciere, è ovviamente diritta, mentre la linea di tiro non coincide con il piano di azione della corda

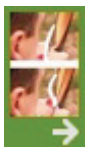
2. lo sgancio con le dita trascina la freccia all'interno, innescando una curvatura che l'accelerazione accentua nella parte posteriore più sollecitata

3. per reazione elastica, la freccia inverte la flessione verso la parte opposta, con la conseguenza di allontanare dall'arco la sua parte mediana

4. nel momento d'uscire la coda della freccia tocca l'arco scostandosi di lato, mentre l'insorgere di oscillazioni armoniche provoca una doppia curvatura a "S"

5. la doppia curvatura si attenua ma la coda della freccia si sposta ancor più verso l'esterno, generando una portanza che trattiene la punta sulla linea di tiro

6. l'azione raddrizzante dell'impennaggio innesca una serie di oscillazioni progressivamente smorzate.


vedere schede: www.outlab.it/sk0506.htm e www.outlab.it/sk2041.htm

Normalmente la flessione dell'asta non supera di molto il suo diametro.

ASSETTO INIZIALE DELLA FRECCIA

A causa della sua ambiguità, oggi si preferisce accantonare i presupposti teorici del paradosso per convergere l'attenzione sulle conseguenze manifeste, in termini di **assetto della freccia** nel momento in cui esce dall'arco. Per fare indagini su questo tema non sono indispensabili attrezzature di grande tecnologia. Molte informazioni utili possono essere ottenute con le solite procedure utilizzate per la messa a punto degli archi:

- rilevando la deviazione con cui la freccia giunge sul paglione a distanza ravvicinata
- scoccando la freccia attraverso fogli di carta, posti a distanze progressive.

Non è strettamente necessario che la freccia esca dall'arco perfettamente in asse sulla linea di tiro. Se l'arciere è destro, si ritiene accettabile che esca con la cocca spostata in alto e un poco a sinistra. Conseguenti sbandamenti della freccia nel tratto iniziale, sono osservabili anche nelle traiettorie dei migliori arcieri a livello mondiale, i cui archi sono sicuramente messi a punto da un'equipe di tecnici qualificati.

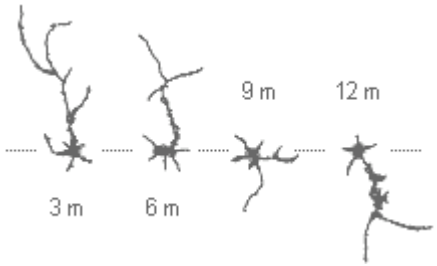


Fig.4 - Passaggio della freccia attraverso un foglio di carta

Con parametri simili a quelli da noi stabiliti, è probabile ottenere tracce di passaggio nei fogli di carta come quelle rappresentate in Fig.4. Esse sono tali da testimoniare un'inversione su distanze di 20–30 metri, con tempi dieci volte superiori a quelli delle oscillazioni analizzate nei paragrafi precedenti. Quelle che rileva il foglio di carta sono altra cosa: sono gli 'scodamenti' che disallineano la freccia dalla linea di tiro.

Per approfondire l'argomento, occorre effettuare numerose rilevazioni, partendo da una regolazione dell'arco che sia coerente con le prescrizioni del costruttore. In genere viene suggerito che la freccia sia lievemente spostata nella direzione indicata dalla Fig.5. Le conclusioni a cui si può arrivare sono affidabili nella misura in cui si ha avuto la pazienza di documentare ogni successiva variazione – nel tipo di freccia e nella regolazione dell'arco – con misurazioni accurate della inclinazione dell'asta e dello scostamento dal centro del bersaglio. E' inoltre opportuno che le misurazioni siano fatte in modo da potere analizzare separatamente le deviazioni orizzontali dalle deviazioni verticali per il fatto che hanno cause nettamente distinte.

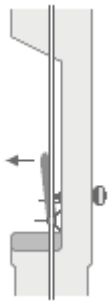


Fig.5 - Allineamento della freccia in rapporto alla corda

I criteri da usare per l'interpretazione dei risultati sono ampiamente descritti in ogni manuale tecnico per istruttori d'arco. Qui può essere sufficiente elencare i punti critici da tenere sotto controllo.

Per quanto riguarda l'assetto orizzontale, l'origine del problema e l'opportunità di soluzione hanno relazione con:

- la presenza e la profondità della finestra dell'arco
- la rigidità della freccia che agisce secondo i meccanismi del paradosso
- l'ingombro del portafreccia che determina l'allineamento rappresentato in Fig.5
- la presenza di un ammortizzatore che interagisce con la rigidità della freccia
- il movimento della mano sulla corda
- l'eventuale rotazione orizzontale provocata dalla mano sull'impugnatura.

Per dare senso a quanto è stato detto, è bene ricordare che in balistica il danno non viene dall'entità di un disturbo, ma dalla incostanza che ha origine nella complessità del sistema. Un bottone ammortizzatore può essere controproducente se la rigidità della freccia è già ottimale. Un portafreccia tecnologico, nelle mani di un arciere mediocre, non dà risultati migliori di quelli che otterrebbe con un semplice appoggio, come quello dei longbow. Il vero miglioramento sta nella costanza dell'esecuzione.

Per quanto riguarda l'assetto verticale, problemi e soluzioni vanno cercati negli elementi che determinano il movimento dell'arco quando la freccia viene scoccata. Osservando la Fig.6 possiamo ragionare sulle asimmetrie che negli archi sono generate dalla distanza tra appoggio della freccia **O** e perno dell'impugnatura **P**.
I manuali e le specifiche tecniche dei costruttori indicano quanto il **punto d'incocco C'** debba essere più alto del punto **C**, ortogonale a **O** rispetto all'asse **B'B**,. Questa condizione è già sufficiente per fare in modo che, quando l'arco è teso, l'angolo **θ'** del flettente superiore sia minore dell'angolo **θ**, del flettente inferiore. Questa differenza spontanea può essere variata dalla differenza di rigidità dei flettenti voluta dal costruttore di un arco ricurvo, o dal diverso serraggio dei vitoni che regolano la precarica di un compound. Supponendo che l'impugnatura resti immobile quando la freccia è scoccata, la distanza **C'C**, è ottimale se **C'** è in linea con **CO**. In ogni caso risulta evidente che l'asse della freccia non è ortogonale all'impugnatura.

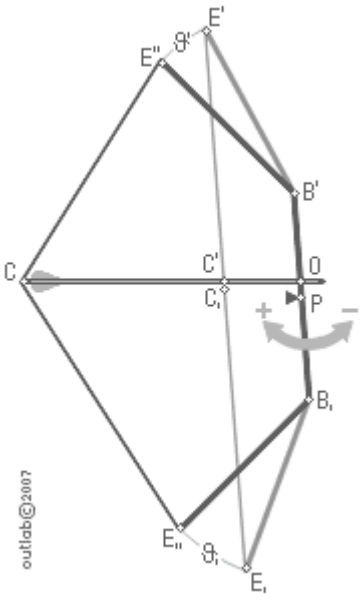


Fig.6 - Movimenti dell'arco e allineamento verticale della freccia

In realtà vi sono forze non trascurabili dalle quali dipende il movimento dell'arco sul piano verticale. Alcune di queste sono dipendenti dallo stile di tiro. Per esempio, se la mano sull'impugnatura esercita una presa eccessiva, è molto probabile che liberi poi spinte torcenti nel momento in cui la mano della corda lascia la presa. Altre sono dipendenti dalla qualità dell'arco e possono essere compensate tra loro con un'accurata messa a punto. Per esempio:

• l'arco teso ha il baricentro arretrato rispetto alla mano dell'impugnatura, e quindi tende a cadere indietro abbassando il punto d'incocco della freccia che sta uscendo

• la spinta della freccia, che agisce sull'asse CO esterno a P, comporta un rinculo che fa ruotare l'arco all'indietro

• la tendenza a ruotare in avanti, è generata dalla differenza di percorso dei due flettenti dovuta all'asimmetria dell'arco.

E' quindi evidente che la corretta posizione del punto d'incocco possa essere determinata soltanto sperimentalmente, dopo aver acquisito una tecnica di tiro sufficientemente corretta e costante. In questa fase, l'uso di un bilanciere, indispensabile a livelli agonistici elevati, può essere negativo. Se il bilanciere è chiamato a stabilizzare un arco fortemente squilibrato, lo può fare solo sottraendo energia alla freccia e mascherando problemi che dovrebbero essere risolti altrimenti.

ASSETTO DELLA FRECCIA IN VOLO

Per affrontare la questione di ciò che succede alla freccia quando è uscita dall'arco, possiamo immaginare di prendere due fogli di carta uguali. Ne accartocciamo uno fino a farne una palla tonda e serrata. Pieghiamo l'altro ricavando uno di quegli aeroplanini che sanno fare i ragazzi. Se lanciamo il foglio accartocciato otteniamo una traiettoria che risponde al nostro gesto in modo semplice e ripetitivo. Se lanciamo il foglio ripiegato otteniamo un itinerario di volo che sembra stravagante per il fatto di dipendere da un complicato groviglio di cause. Le frecce sono tutt'altro che un proiettile tondeggiante. Sono più simili ad un rudimentale velivolo, soprattutto per l'impennaggio, che è la più geniale delle intuizioni che hanno fatto la fortuna dell'arco.

Una rotonda palla di cannone, che offre resistenza costante, comunque sia orientata, è il proiettile più adatto per rispondere fedelmente ad una equazione della traiettoria che tenga conto solo della resistenza aerodinamica. Questo è l'ambito del cosiddetto **primo problema balistico** che abbiamo affrontato parlando di **balistica esterna.** (*www.outlab.it/works/esterna.pdf*) Ma è sufficiente che la sfera giri su se stessa per ottenere traiettorie ampiamente deviate, come quelle percorse da una palla da tennis, o da un pallone da football, colpiti tangenzialmente.

Per analizzare le forze e i movimenti che condizionano il volo di una freccia, occorre tenere conto anche delle forze e delle perturbazioni che si oppongono alla stabilità del percorso sulla traiettoria. Questo è il **secondo problema balistico**, che per essere affrontato richiede qualche cognizione di aerodinamica.

Un corpo che si muove in un fluido, genera un campo di pressioni-velocità che può essere descritto da linee di flusso, come quelle mostrate in Fig.7. L'orientamento del campo dipende da ciò che avviene a contatto con la superficie del corpo. Nella parte posteriore, l'interruzione dello scorrimento lineare genera scie vorticose la cui entità è esasperata dall'assenza di forme adeguatamente affusolate. Questi vortici sottraggono spazio al fluido circostante provocando maggiori velocità di flusso. Se il

corpo ruota su se stesso, come nella Fig.7.2, la simmetria degli scorrimenti viene ampiamente alterata differenziando le velocità ai due lati dell'avanzamento. Questo fenomeno è conosciuto con il nome di **effetto Magnus**.

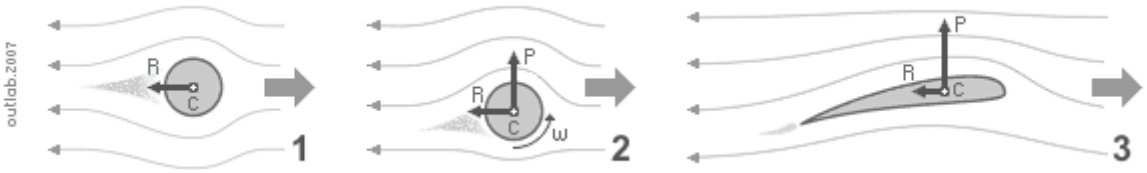


Fig.7 - Linee di flusso attorno ad una sfera, una sfera rotante, un profilo alare

Uno dei principali teoremi della fisica, il **teorema di Bernoulli**, afferma che nei fluidi di viscosità trascurabile, la pressione è inversamente proporzionale alla velocità. Per prenderne atto è sufficiente soffiare dall'alto tra due fogli di carta tenuti sospesi tra le dita e constatare che invece di allontanarsi si avvicinano. E' questo il motivo per cui i rubinetti di casa miscelano più aria se l'acqua esce più velocemente.

Nella Fig.7, le sezioni individuate da linee di flusso ravvicinate, sono quelle che hanno velocità elevata e pressione ridotta. Quando il corpo è a riposo, non vi sono flussi che lo circondano. La pressione uniforme che agisce sulla sua superficie è quindi perfettamente bilanciata. Quando il corpo è in movimento, le pressioni si differenziano. Per valutare quali siano le conseguenze, possiamo immaginare di moltiplicare ogni singolo elemento della superficie **dA** per la pressione assoluta $\mathbf{P}_i$ che vi è presente.

(9) $F = \Sigma dA \cdot P_i$

La risultante delle forze così calcolate costituisce la forza aerodinamica totale, che è opportuno analizzare secondo due componenti:

- la componente R detta resistenza, che tende a ridurre la velocità d'avanzamento
- la componente P detta portanza, che tende a deviare la direzione del moto.

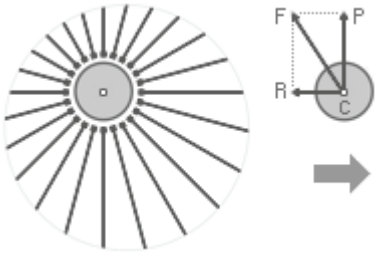


Fig.8 - Risultante delle pressioni che agiscono sulla superficie del corpo

Nei casi di sufficiente simmetria, come nella Fig.7.1, la portanza è assente. Nella Fig.7.2 la portanza è generata dalla rotazione. Nella Fig.7.3 è generata dall'asimmetria del profilo alare. Il punto di applicazione **C** è detto centro di spinta. Esso coincide con il baricentro solo in casi particolari come quello di una sfera omogenea. La simmetria ha dunque un'importanza strategica. Infatti, ogni buon arciere usa in competizione solo frecce che hanno asta perfettamente rettilinea, cocca allineata all'asse e alette equilibrate.

Per definire la posizione G del **baricentro** di una freccia è sufficiente conoscere le masse **m** dei singoli componenti e le posizioni **b** dei loro baricentri rispetto al solco della cocca.

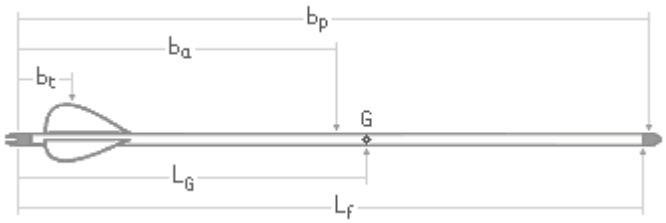


Fig.9 - Calcolo della posizione del baricentro

(10) $L_G = (b_t \cdot m_t + b_a \cdot m_a + b_p \cdot m_p) / m_f$

dove:
$m_f = m_c + m_t + m_a + m_p$

La massa $\mathbf{m}_c$ della cocca partecipa al calcolo di quella totale della freccia, mentre la componente $\mathbf{b}_c \cdot \mathbf{m}_c$ è esclusa dalla formula poiché $\mathbf{b}_c$ è prossimo a zero. Con i parametri definiti all'inizio di questo testo, il baricentro della nostra freccia è posto a circa 42 centimetri dalla cocca, cioè: a 57% dell'asta in direzione della punta.

Frequentemente la posizione del baricentro viene definita seguendo il criterio del cosiddetto **FOC** (*Front-Of-Center*) che definisce l'avanzamento del baricentro, rispetto al punto medio della freccia, in termini di % della lunghezza della freccia stessa, misurata secondo i criteri AMO.

(11) $FOC\ \% = 100 \cdot (L_G - L_f / 2) / L_f$

dove:
L_G = distanza tra il baricentro della freccia finita e il solco della cocca
L_f = lunghezza della freccia

Il risultato è 7%. Il confronto dei due criteri di calcolo è molto meno contorto di quello che appare osservando le formule. Basta aggiungere 50 al valore del FOC 7% per sapere che il baricentro è lontano dalla cocca 50+7, cioè 57% della lunghezza della freccia.

Per esaminare il comportamento in volo, la Fig.10 rappresenta una freccia con un assetto inclinato rispetto alla traiettoria sulla quale sta procedendo. Per semplicità di disegno, la traiettoria è orizzontale e l'inclinazione della freccia è sul piano verticale, ma i ragionamenti che seguono valgono per ogni altra situazione analoga. L'angolo α racchiuso tra l'asse della freccia e la tangente della traiettoria è detto angolo di incidenza.

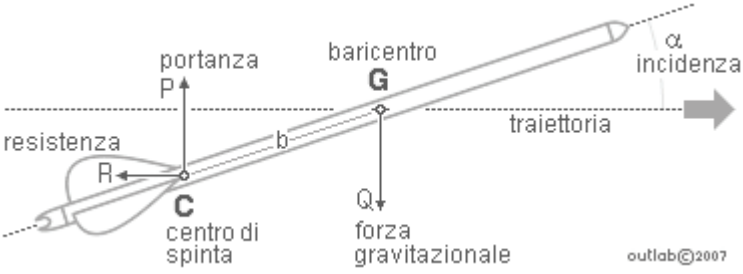


Fig.10 - Forze che agiscono sulla freccia in volo

E' ragionevole tracciare la traiettoria in modo che passi dal punto **G**, baricentro della freccia dove agisce la forza gravitazionale che tende a curvare la traiettoria verso il basso. La posizione del **centro di spinta C** è molto più difficile da determinare. Se la freccia fosse un cilindro uniforme, il centro di spinta sarebbe prossimo al baricentro. Infatti, scagliando una freccia non impennata e con punta leggera, è facile che si capovolga in volo. Per una freccia impennata, si può ritenere che il centro di spinta sia in prossimità dell'inizio delle alette, in posizione abbastanza arretrata per avere un assetto che tenda ad allinearsi sulla traiettoria.

L'azione raddrizzante non è però immediatamente risolutiva. Infatti, man mano che la freccia si allinea sulla traiettoria, la portanza **P** tende a zero, ma l'inerzia del movimento porta la freccia oltre il punto d'equilibrio, generando un momento raddrizzante di segno opposto. Conformemente a quanto è stato detto parlando di balistica esterna i valori di **R** e **P** sono esprimibili dalle formule:

(11a) $R = \frac{1}{2} C_r \cdot \sigma \cdot S \cdot V^2$
(11b) $P = \frac{1}{2} C_p \cdot \sigma \cdot S \cdot V^2$

ma qui occorre tenere conto della variabilità di $\mathbf{C_r}$ e $\mathbf{C_p}$ in funzione dell'angolo di incidenza. Le forze aerodinamiche, oltre a generare rallentamento della velocità e deviazione della traiettoria, danno luogo ad una azione rotante il cui momento $\mathbf{M_r}$ è commisurato alla distanza **b** tra centro di spinta e baricentro:

(12) $M_r = R \cdot b \cdot \text{sen}\ \alpha + P \cdot b \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} (C_r \cdot \text{sen}\ \alpha + C_p \cdot \cos \alpha) \cdot \rho \cdot S \cdot b \cdot V^2$

Per angoli d'incidenza ridotti, come sono quelli normalmente messi in atto da una freccia, si può considerare che la funzione trigonometrica del seno sia prossima alla misura dell'angolo in radianti, mentre il coseno sia pressoché uguale a uno. Inoltre si può considerare che $\mathbf{C_r}$ sia sufficientemente costante mentre $\mathbf{C_p}$ sia esprimibile come funzione lineare dell'angolo d'incidenza $\mathbf{C_p = K_p \cdot \alpha}$. Poiché la teoria aerodinamica ritiene che **S** debba essere la sezione maestra per i corpi fusiformi, oppure la superficie alare per i velivoli, il coefficiente $\mathbf{K_p}$ deriva dalla sovrapposizione della portanza fusiforme dell'asta e della portanza alare delle alette, per cui:

(13) $K_p = K_{p'} + K_{p''} \cdot A/S$

dove A è la superficie alare. L'equazione del momento raddrizzante può quindi essere scritta nella forma seguente, con α espresso in radianti:

(14) $M_r = \frac{1}{2} \cdot (C_r + K_{p'} + K_{p''} \cdot A/S) \cdot \alpha \cdot b \cdot \rho \cdot S \cdot V^2$

Questa equazione può sembrare un inutile esercizio teorico, ma fornisce qualche indicazione utile per ottimizzare una freccia, purché si faccia attenzione a non aumentare il benefico momento raddrizzante $\mathbf{M_r}$ con fattori che aumentano anche la dannosa resistenza **R** che rallenta la velocità della freccia:

- nell'equazione la velocità è elevata al quadrato, per cui il momento, ma anche la ritardazione, aumentano quattro volte se la freccia viaggia a velocità doppia
- una maggiore superficie alare **A** ha effetto in modo benefico sul momento raddrizzante, purché lo spessore delle alette sia molto sottile altrimenti aumenterebbe anche la sezione maestra che peggiora la ritardazione
- il momento raddrizzante migliora aumentando la distanza **b** tra centro di spinta e baricentro, per cui può essere utile aumentare la massa della punta e arretrare il più possibile le alette

- con qualche dispiacere per chi ama le lunghe penne naturali, è evidente che le alette migliori siano quelle in polimero, piuttosto corte ma alte, con un profilo parabolico ben raccordato per evitare l'innesco di scie vorticose.

Per avere una valutazione pratica dell'effetto raddrizzante, senza entrare nella complessità della formula (14) possiamo utilizzare il concetto di **volume di coda V_c** suggerito da M.Marconi sulle pagine della rivista ARCIERI del 1986. Si tratta di una misura dell'effetto raddrizzante espressa moltiplicando la superficie totale delle alette $\mathbf{A_t}$ per la distanza tra il baricentro delle alette $\mathbf{L_t}$ e il baricentro della freccia $\mathbf{L_G}$.

(15) $V_c = A_t \cdot (L_G - L_t)$

La definizione di "volume" ha senso solo per il fatto d'aver moltiplicato una superficie per una lunghezza. La superficie considerata può essere quella di un solo lato, o di entrambi i lati delle alette, purché il confronto avvenga tra valori calcolati con lo stesso criterio. Si tratta di un indice empirico che però è sufficiente per valutare come cambia l'effetto raddrizzante modificando le caratteristiche della freccia.

In ogni caso occorre avere un criterio per valutare quale sia il grado di stabilizzazione di cui si ha realmente bisogno. Se la freccia fosse scagliata con asse perfettamente allineato sulla traiettoria, l'azione raddrizzante dovrebbe compensare soltanto la progressiva inclinazione verso il punto di caduta.

Se invece lascia l'arco in condizioni perturbate, è inevitabile che la freccia inneschi una serie di oscillazioni che non hanno il tempo di spegnersi su tiri medi dell'ordine di 30–60 metri. In queste condizioni, la freccia può andare a segno con un errore che dipende dal grado di oscillazione in atto nel momento dell'impatto. L'errore è il risultato di due circostanze:
- lo scostamento del baricentro rispetto alla traiettoria desiderata
- la deviazione della punta rispetto al baricentro.

La migliore impennatura della freccia è quella che riesce a stabilizzare la traiettoria in modo che le due devianze si annullano a vicenda, come è mostrato dalla Fig.11.

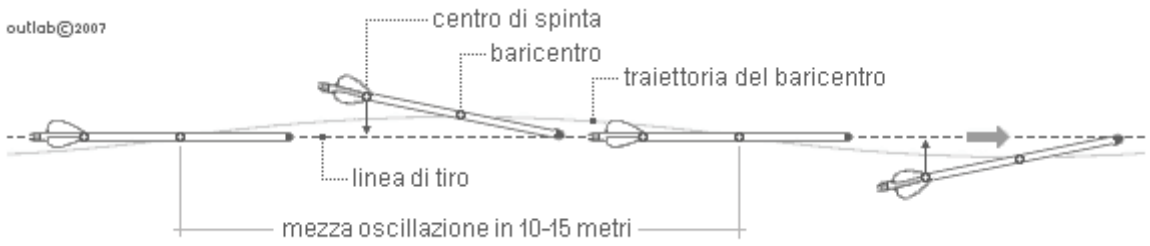


Fig.11 - Andamento ottimale della freccia

Questo è il caso ideale in cui la portanza dell'impennaggio riconduce il baricentro sulla linea di tiro lasciando che la punta si muova in modo rettilineo. E' comunque importante che la freccia abbia lasciato l'arco avendo già la punta sulla linea di tiro, altrimenti l'azione raddrizzante porterà la freccia su una traiettoria traslata

Il caso opposto è quello di una freccia priva di impennaggio, dove il momento raddrizzante è quasi nullo. Infatti, la portanza è solo quella dell'asta e il braccio di leva è minimo, essendo il centro di spinta prossimo al baricentro. In queste condizioni, la freccia continua a lungo il suo volo in posizione sghemba, seguendo una traiettoria leggermente deviata rispetto alla linea di tiro. Vedi Fig.12.

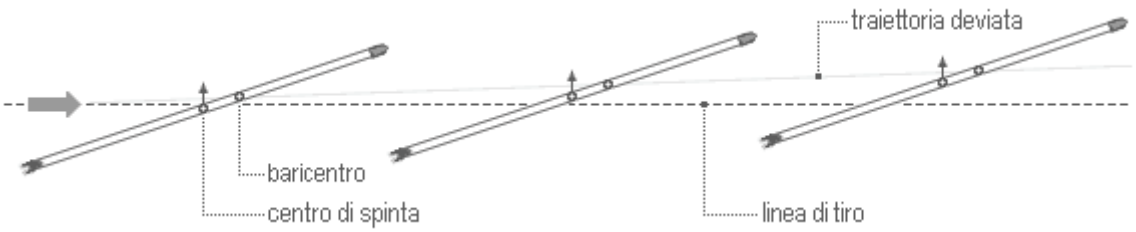


Fig.12 - Andamento tipico di una feccia spennata

Quanto è stato detto a proposito delle ultime due figure, è sufficiente per spiegare la differente posizione delle frecce sul paglione nelle procedure abitualmente usate per tarare il punto d'incocco e il bottone ammortizzatore.

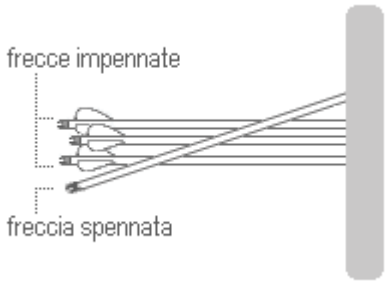


Fig.13 – Posizione delle frecce sul bersaglio

LA VELOCITA' DI CADUTA

Per avere la percezione concreta dell'aerodinamicità di una freccia può essere utile valutare quale sia la velocità massima che può raggiungere in caduta libera.

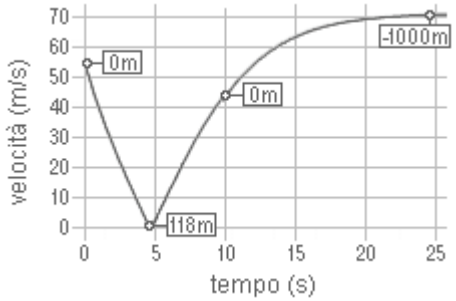


Fig.14 – Quote e velocità di una freccia scagliata verso l'alto

La Fig.14 è riferita a quanto accadrebbe alla freccia che abbiamo esaminato, se fosse scagliata in verticale verso l'alto. In poco più di 4 secondi azzererebbe la velocità giungendo all'altezza di 118 metri. Poi, in poco meno di 6 secondi ritornerebbe a terra arrivando alla velocità di 42 m/s.

Nell'ipotesi che possa continuare a cadere senza limiti, raggiungerebbe la profondità di 1000 metri in altri 15 secondi, con una velocità tendente a stabilizzarsi. Questa è la velocità alla quale la nostra freccia è soggetta ad una resistenza aerodinamica che è uguale alla forza gravitazionale. Dalla formula (11a) si ottiene:

(16) $m_f \cdot g = \frac{1}{2} \cdot C_r \cdot \rho \cdot S \cdot V^2$ da cui: $V_{max} = [(2 \cdot m_f \cdot g) / (C_r \cdot \rho \cdot S)]^{1/2}$

L'equazione porta al risultato di 71,3 m/s: una velocità nettamente superiore a quella con cui è stata scagliata.

LA QUESTIONE DEL VENTO

Un aereo a motore fa parte della massa d'aria in cui si muove. Per chi è a bordo è come se il vento non esistesse. Sono i riferimenti a terra che segnalano un movimento altrimenti non percepibile. Accade così anche per una barca nella corrente di un fiume privo di vortici.

La Fig.15.1 mostra un velivolo con un assetto di volo che, in calma di vento, avrebbe dovuto portarlo da **A** a **A'**. Se nel frattempo v'è presenza di un vento che sposta la massa d'aria che sta attraversando, il pilota si troverà in **A"** se non provvede a cambiare direzione e compensare la deriva a cui è sottoposto. La distanza **A'A"** è quella percorsa dal vento nel tempo di volo.

Le frecce, invece, si spostano lateralmente molto meno, perché hanno velocità e direzione che sono determinate da qualcosa che è compiuto a terra, con modalità indipendenti dal vento. Per esserne convinti basta confrontare queste due contesti:

- un piccolo aereo che procede controvento risulterà molto lento, o persino fermo, per un osservatore a terra
- una freccia scagliata contro vento, non parte a velocità ridotta, ma rallenterà soltanto più in fretta.

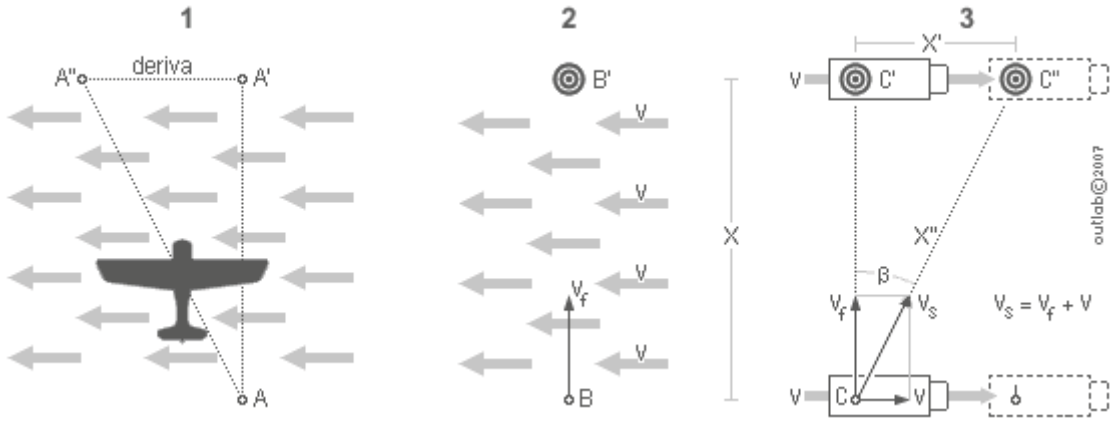


Fig.15 - Deriva causata dal vento

La Fig.15.2 raffigura le condizioni di una freccia scagliata a velocità $\mathbf{V_f}$ dalla posizione **B** al bersaglio **B'** distante **X** mentre vi è vento traverso di velocità **V**. Per meglio analizzare questa situazione possiamo ipotizzare l'opposto di quanto avviene con un tunnel aerodinamico: invece di simulare condizioni di moto generando vento, possiamo simulare condizioni di vento producendo una traslazione. Questo è quanto viene proposto nella Fig.15.3 dove, in aria calma, sono ricreate le medesime condizioni di vento della Fig.15.2, mettendo la postazione di tiro e il bersaglio sul pianale di due automezzi che procedono parallelamente, alla distanza **X** e alla velocità **V** uguale a quella del vento da simulare.

E' evidente che se la freccia venisse semplicemente lasciata cadere fuori dell'automezzo, un osservatore fermo a terra vedrebbe la freccia percorrere una traiettoria come se fosse stata scoccata da un arco alla velocità con cui procede l'automezzo. Quindi, quando poi viene scoccata verso il bersaglio, la freccia procederà con una velocità $\mathbf{V_s}$ che è la somma di $\mathbf{V_f}$ e **V** inseguendo il bersaglio nel suo spostamento.

Se non ci fosse la resistenza dell'aria, la freccia raggiungerebbe il bersaglio nel medesimo punto, qualunque sia la velocità **V**. In realtà, la resistenza causa un rallentamento tanto maggiore quanto più la velocità degli automezzi allunga la traiettoria, e di conseguenza la freccia arriva al bersaglio proporzionalmente più in basso e a sinistra. Questa deviazione è calcolabile.

Supponendo che il centro del bersaglio sia posto alla medesima quota d'altezza dell'occhio dell'arciere, possiamo utilizzare un foglio di calcolo per determinare i parametri della traiettoria che porterebbe da **B** a **B'** nel centro del bersaglio, in assenza di vento:

γ	densità dell'aria	1,225	kg/m3
m_f	massa della freccia	0,0277	kg
L_f	lunghezza della freccia	0,740	m
CB	coefficiente balistico	317	kg/m2
V_f	velocità iniziale della freccia	54	m/s
H_c	altezza dell'occhio	100	mm
φ	angolo di tiro	5,12	°
X	distanza in piano	50	m
Z	quota del bersaglio	0	m
t	durata del volo	0,960	s

Si tratta ora di tradurre questi parametri in quelli che deriverebbero dalla Fig.15.3 simulando due condizioni di vento differenti: un vento moderato, con velocità V di 6m/s, come quello che nelle strade riesce sollevare polvere e fogli di carta; un vento forte, con velocità di 15m/s, cioè 54 chilometri all'ora, come quello che può rendere difficile lo stare in piedi senza un appoggio stabile.

Per misurare la deviazione, rispetto al centro del bersaglio, calcoliamo l'angolo **β**. Poi le distanze **X'** e **X"** corrispondenti a **C'C"** e **CC"**. Infine, il nuovo angolo di tiro **φ'** e la velocità risultante $\mathbf{V_s}$.

Condizioni di vento:		6	15	m/s
β	= arctan [V / (V_f·cos φ)]	6,37	15,58	°
X'	= X·tan β	5,578	13,945	m
X"	= X / cos β	50,310	51,908	m
φ'	= arctan (tan φ·cos β)	5,09	4,93	°
V_s	= V_f·sen φ / (cos β·con φ')	54,3	56,0	m/s

La **deviazione dovuta al vento** è valutabile calcolando la differenza tra il tempo richiesto dalla freccia per percorrere la distanza **X"** e il tempo richiesto dal bersaglio per percorrere **X'**. Dobbiamo quindi utilizzare nuovamente il foglio di calcolo per determinare i parametri delle traiettorie inclinate.

Condizioni di vento:		6	15	m/s
t'	durata del volo	0,960	0,962	s
ΔX =t'·V–X'	deviazione lorda orizzontale	–185	– 492	mm
ΔZ	deviazione verticale	– 5	– 18	mm

Per fare un calcolo corretto, occorre anche considerare che, nella simulazione ipotizzata nella Fig.15.3, la freccia non parte allineata sulla traiettoria **CC"** ma inizia il volo messa di traverso, essendo orientata in linea con **CC'**. Questo ha relazione con ciò che avviene nella realtà: la freccia si inclina sotto l'effetto del vento fino a infilarsi obliquamente nel paglione, come ogni arciere ha potuto sperimentare.

A causa dell'effetto combinato della portanza e del momento raddrizzante, descritti a proposito della Fig.11, la traiettoria sulla quale la freccia si allinea, è prossima a quella passante dalla posizione che aveva la sua punta nell'istante iniziale. La deviazione orizzontale deve quindi essere incrementata del valore $\mathbf{L_f \cdot \tan \beta}$ equivalente rispettivamente a 78 e 198 mm per le due condizioni di vento in questione.

Condizioni di vento:	6	15	m/s
deviazione orizzontale in direzione del vento	263	691	mm
deviazione verticale verso il basso	5	18	mm

Si può stimare che nelle condizioni che abbiamo ipotizzato la deviazione della freccia sia valutabile attorno al 5% della deriva del vento. Ulteriori calcoli potrebbero dimostrare che le frecce dotate di maggiore velocità e massa sono in grado d'avere deviazioni minori a parità di vento.

ROTAZIONE DELLA FRECCIA

La questione della rotazione determinata dall'utilizzo di **impennaggi inclinati** è già stata esaminata parlando di balistica esterna. Riprendiamo qui l'argomento solo per aggiungere un paio di considerazioni che hanno relazione con quanto è stato detto a proposito della portanza aerodinamica.

La stabilizzazione generata dall'effetto giroscopico prodotto dalla rigatura elicoidale della canna è assolutamente necessaria per i proiettili delle armi da fuoco. Il loro profilo, studiato per ridurre la resistenza ad alta velocità, comporta un centro di spinta più avanzato del baricentro. Senza stabilizzazione questi proiettili si capovolgerebbero in volo perdendo gittata e precisione.

Le stesse motivazioni non valgono invece per le frecce che sono già stabilizzate dalle alette, e hanno il centro di spinta in posizione ampiamente arretrata. Qui la rotazione può essere utile solo per evitare che un difetto di allineamento dell'asta, o di simmetria delle alette, generi una portanza che insista stabilmente in una sola direzione. Occorre però fare attenzione perché la rotazione stessa può essere causa di perturbazione della traiettoria.

La rotazione che avviene su un asse allineato con l'avanzamento non dovrebbe generare una portanza come quella descritta nella Fig.7.2. Ma il cambiamento d'inclinazione dovuto alla curvatura della traiettoria è già in teoria sufficiente per innescare una deviazione verso sinistra, se l'inclinazione dell'impennaggio è fatta per una rotazione in senso orario, oppure verso destra nel caso contrario. Stiamo parlando di una deviazione abbastanza trascurabile, ma il problema può essere più sensibile in caso di vento. Infatti, una freccia con rotazione in senso orario è indotta a deviare verso il basso con vento che viene da destra, oppure verso l'alto con vento che viene da sinistra.

Chi usa impennaggi inclinati, ha quindi ragioni sufficienti per sorvegliare che le proprie frecce abbiano tutte il medesimo senso di rotazione.

■

Vedere altri documenti da: www.outlab.it