

UN MODELLO MATEMATICO PER ARCHI RICURVI

Valutazione delle prestazioni di un arco in funzione delle sue forme e dimensioni

di Mario A. e Riccardo Ostidich

(Testo pubblicato sulla rivista ARCIERI, aprile 1990, "Prestazioni: il test di trazione")

Per documentare le prestazioni di un arco è buona regola ricorrere al cosiddetto **test di trazione** che consente di tracciare su un diagramma, il progressivo variare dello sforzo che un arciere esercita nel tendere quell'arco. Sempre più questi diagrammi trovano spazio sulle riviste d'arcieria.

In genere questa misurazione è accompagnata da un **test di velocità**, in quanto il primo permette di misurare l'**energia accumulata** dall'arco quando è teso all'allungo d'ancoraggio, mentre il secondo consente di calcolare l'**energia cinetica** della freccia all'uscita dall'arco. Il rapporto tra le due misure di energia esprime quindi il **rendimento** ottenuto per quell'abbinamento di arco e freccia.

Il test di trazione, senza il complementare test di velocità, sembrerebbe quindi privo di interesse. Eppure dalle esperienze che abbiamo condotto con un dinamometro di precisione, raccogliendo una considerevole quantità di dati, ci siamo convinti che il test di trazione può fornire, anche da solo, notizie importanti per dare un giudizio sulla progettazione e sulla regolazione di un arco.

Allo scopo di migliorare le nostre conoscenze teoriche necessarie per interpretare i dati sperimentali, ci siamo proposti di definire un **modello matematico** che permettesse di simulare, con l'aiuto di un computer, il comportamento statico di un arco sottoposto a trazione. Abbiamo così portato a termine uno studio che riprende e sviluppa alcuni concetti fisico-matematici la cui formulazione risale a una nota pubblicazione fatta da **C. N. Hickman** nel 1937 con il titolo 'The Dynamics of Bow and Arrow'.



vedere: <http://www.outlab.it/doc/hickman7.pdf>

Le argomentazioni che seguono danno un sunto dei passi principali di quello studio, con l'attenzione di ridurre allo stretto necessario la quantità e la complicazione delle formule matematiche.

IL MODELLO

Il modello che abbiamo utilizzato si limita a considerare il caso degli archi tradizionali, cioè longbow e ricurvi, escludendo quindi i moderni compound azionati da complessi sistemi di carrucole eccentriche o leve.

Il modello riduce l'arco a una struttura costituita da due elementi mobili (**bracci virtuali**) incernierati su un elemento centrale (**impugnatura virtuale**), ipotizzando che la forza che si oppone al movimento dei bracci sia una funzione lineare dell'angolo di flessione $\theta + \psi$, misurato rispetto alla posizione dell'arco allentato. Tale forza sarebbe quindi esprimibile dal prodotto dell'angolo di flessione per un coefficiente k . L'entità di k è rilevabile con un dinamometro o, in linea teorica, calcolabile in funzione delle specifiche fornite dal costruttore dell'arco in questione.

Per definire quali lunghezze virtuali dei bracci e dell'impugnatura rappresentano un dato arco reale, si è fatto ricorso al metodo grafico rappresentato nella Fig.1 che rileva lo sviluppo dell'arco allo stato incordato e allo stato teso, e quindi individua quali punti della retta che percorre l'impugnatura – passando per il punto di **perno** – possono essere considerati come **centri di rotazione** dei corni dei due flettenti nel passaggio dalla posizione di **arco incordato** alla posizione di **arco teso**.

E' interessante rilevare che la distensione della parte esterna dei flettenti compensa la curvatura della parte interna, giustificando il fatto che l'arco ricurvo abbia prestazioni migliori di un longbow, pur avendo dimensioni più piccole.

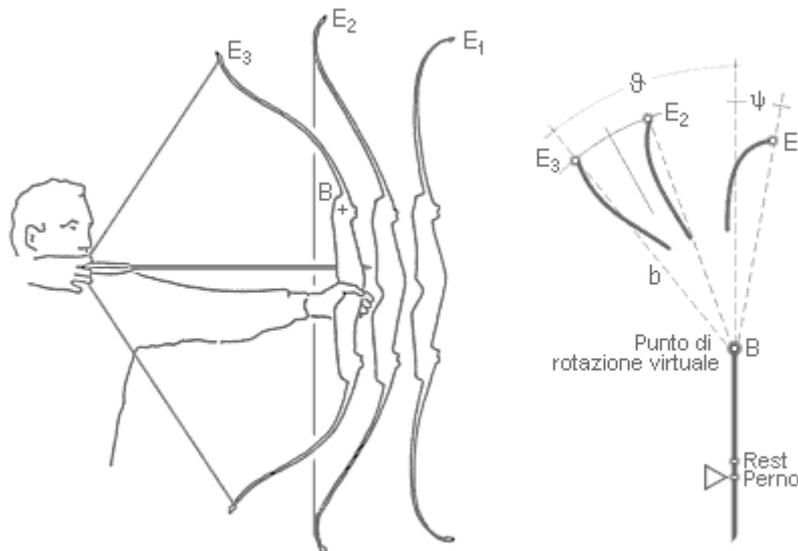


Fig.1 - Schema della determinazione delle lunghezze virtuali dei bracci e dell'impugnatura

Lo schema che ne deriva è quello rappresentato nella Fig.2. La novità qui introdotta – rispetto al modello di Hickman adatto solo per lo studio dei longbow – sta nel fatto di tenere conto della **precarica dei flettenti** ad arco allentato, e delle **asimmetrie di azionamento** tipiche di un arco ricurvo.

Per semplificare le formule è stato convenuto di misurare l'allungo dal punto d'incocco al perno dell'impugnatura, e non al portafreccia. L'imprecisione è accettabile per il fatto d'essere sensibile solo all'inizio della trazione.

Le relazioni trigonometriche, implicate dal modello, sono riportate in appendice, per la curiosità di qualche appassionato di matematica. Qui di seguito, può essere sufficiente riassumere le equazioni che descrivono le forze in atto quando l'arco è messo in trazione fino alla posizione d'ancoraggio seguendo lo schema della Fig.2.

Arco teso (carico) – Arco incordato (scarico) – Arco allentato

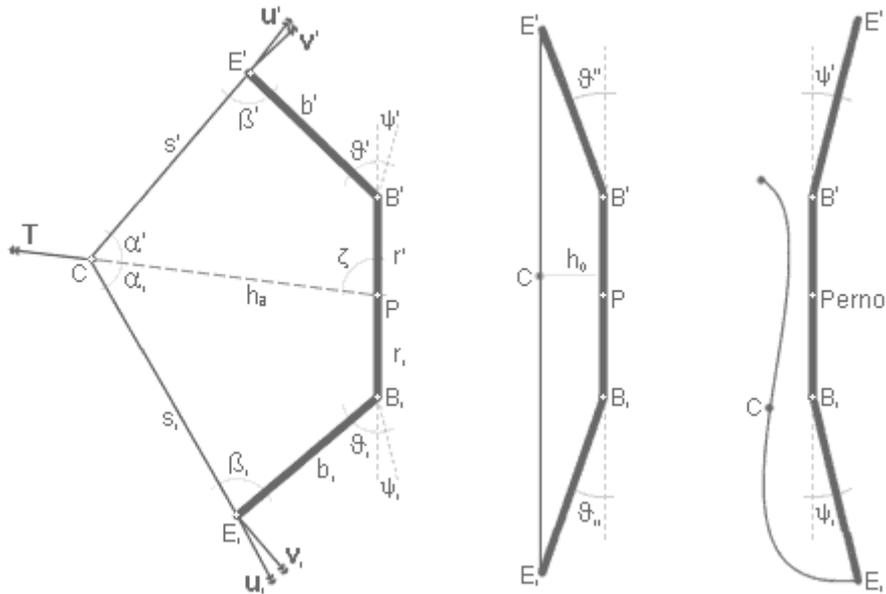


Fig.2 - Schema del modello utilizzato per lo studio del comportamento statico degli archi tradizionali

Parametri dimensionali

- bracci virtuali
- impugnatura virtuale
- corda
- angoli di precarica
- angoli dei bracci incordati
- angoli dei bracci tesi
- allungo d'ancoraggio

$$\begin{aligned}
 b' &= \underline{B'E'} \\
 r' &= \underline{RB'} \\
 s' &= \underline{CE'} \\
 \psi' & \\
 \theta'' & \\
 \theta' & \\
 h_a &= \underline{CP}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b, &= \underline{B,E,} \\
 r, &= \underline{RB,} \\
 s, &= \underline{CE,} \\
 \psi, & \\
 \theta,, & \\
 \theta, &
 \end{aligned}$$

Reazione dei bracci

- $v' = k' \cdot (\theta' + \psi')$
- $v, = k, \cdot \theta, + \psi,)$

Tensioni della corda

- $u' = v' / \text{sen}\beta'$
- $u, = v, / \text{sen}\beta,$

Carico di trazione

- $T = u' \cdot \text{cos}\alpha' + u, \cdot \text{cos}\alpha,$

Energia accumulata, risultante dall'integrale di T da h_0 ad h_a

$$\begin{aligned}
 W &= \sum T \cdot dh \\
 &= \frac{1}{2} \cdot k' \cdot b' \cdot [(\theta' + \psi')^2 - (\theta'' + \psi')^2] + \frac{1}{2} k, \cdot b, \cdot [(\theta, + \psi,)^2 - (\theta,, + \psi,)^2]
 \end{aligned}$$

Per verificare la validità del modello, confrontando i risultati di calcolo con dati rilevati sperimentalmente, è stato scelto un arco ricurvo da caccia Samick SHT da 60# 58", le cui dimensioni riferite al modello sono state così valutate:

- | | | |
|---------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| ▪ lunghezza dei bracci virtuali | $b' = 0,435 \text{ m}$ | $b, = 0,425 \text{ m}$ |
| ▪ lunghezza dell'impugnatura virtuale | $r' = 0,290 \text{ m}$ | $r, = 0,280 \text{ m}$ |
| ▪ lunghezza della corda | $s' = 0,612 \text{ m}$ | $s, = 0,748 \text{ m}$ |
| ▪ angolo di retroversione | $\psi' = 12^\circ$ | $\psi, = 12^\circ$ |
| ▪ coefficienti di flessibilità | $k' = 214 \text{ N/rad}$ | $k, = 214 \text{ N/rad}$ |

I valori del coefficiente di flessibilità sono stati calcolati tenendo conto dei dati del costruttore che danno un carico di 60 libbre all'allungo AMO di 28 pollici, equivalenti a 667 mm di allungo netto.

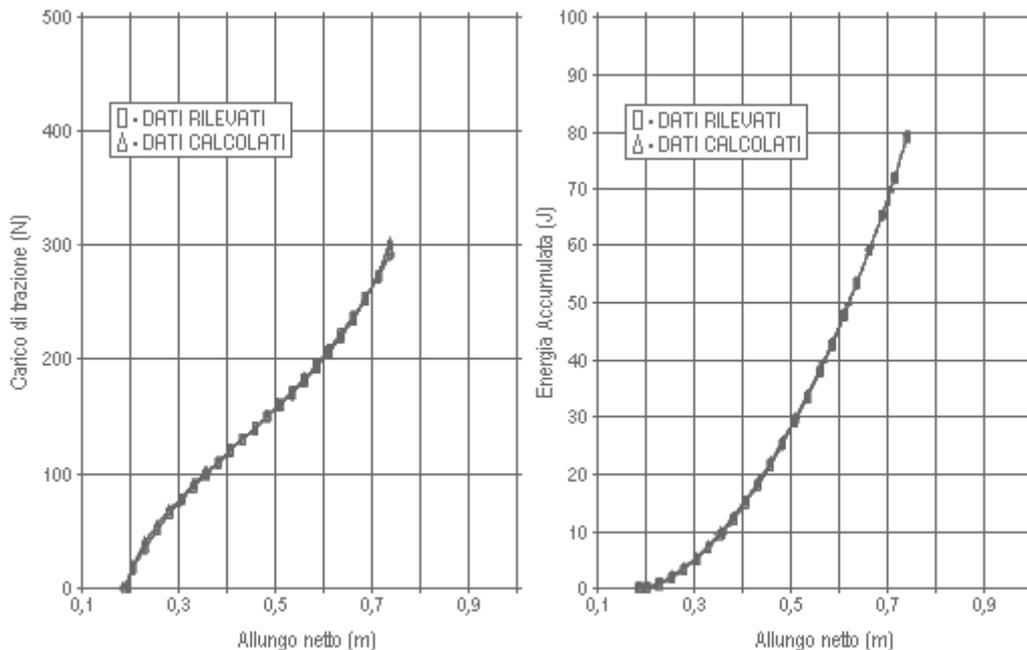


Fig.3 - Verifica della corrispondenza tra modello e realtà

La Fig.3 pone a confronto i dati rilevati e quelli calcolati, relativi al **carico di trazione** (a sinistra) e alla corrispondente **energia accumulata** (a destra). Appare evidente che il modello matematico sia in grado di fornire risposte così accurate che, in entrambi i diagrammi, i dati calcolati si sovrappongono a quelli rilevati tanto da impedire di distinguere gli uni dagli altri. Si può quindi presumere che siano altrettanto vicini alla realtà anche gli altri grafici ottenibili con il modello in condizioni non verificabili con rilievi di laboratorio.

LE ANALISI

La Fig.4 mostra il risultato di una simulazione applicata estendendo l'allungo oltre i limiti sperimentabili nella realtà. E' interessante notare che tendendo l'arco, la **tensione della corda** diminuisce fino a un minimo corrispondente a circa 2/3 dell'allungo d'ancoraggio. Sarebbe un risultato che può variare di molto cambiando l'arco in esame, invece questo ed altri risultati hanno mostrato una costanza considerevole anche cambiando sostanzialmente il tipo di arco, perché evidentemente il loro dimensionamento ricalca criteri di ottimizzazione ormai sperimentati.

Se le proporzioni vanno rispettate, ne consegue che le dimensioni di un arco devono essere adeguate all'allungo dell'arciere a cui è destinato. Questo fatto può essere verificato calcolando ad esempio quali dimensioni massimizzano il rapporto tra l'energia accumulata **W** e il carico d'ancoraggio **T**, il che significa: la massima velocità della freccia a parità di sforzo dell'arciere. Dai nostri calcoli è risultato, ad esempio, che la lunghezza ottimale di un longbow corrispondente a circa 2,5 volte la misura dell'allungo, mentre per un ricurvo è sufficiente una lunghezza inferiore.

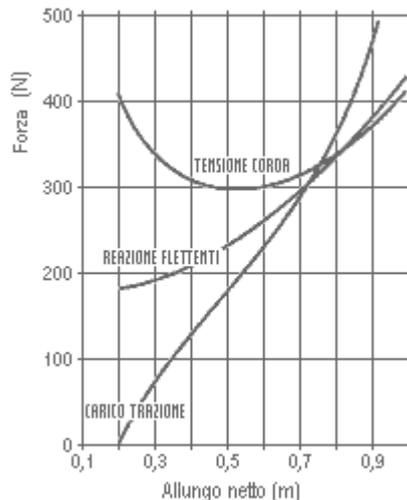


Fig.4 - Variazione delle forze che agiscono in un arco tradizionale

Poiché l'energia accumulata dall'arco è l'integrale del prodotto tra il carico di trazione e l'allungo, tale valore risulta misurato dall'area racchiusa dalla curva disegnata dal test di trazione. Risulta quindi evidente che a parità di altezza della corda, d'allungo e di carico d'ancoraggio, i valori massimi d'energia saranno tanto maggiori quanto più la curva di trazione presenta una **pancia** accentuata nel primo tratto, seguita da un andamento con inclinazione costante.

Un'impennata della curva di trazione nell'ultimo tratto (quella che alcuni chiamano **saturatione** e altri **stack**) segnala con certezza che l'arco viene teso oltre l'allungo per il quale è stato progettato, con il risultato di aumentare molto più lo sforzo dell'arciere di quanto non si migliori l'energia accumulata e, quindi, la velocità della freccia. Questo eccesso di trazione comporta anche il rischio di danneggiare l'arco irrimediabilmente.

Confrontando la curva del carico di trazione della Fig.3 con quella della Fig.4, si può notare che l'arco ricurvo mostra una 'pancia' più accentuata rispetto al longbow. Questo vantaggio è determinato dalla **precarica** offerta dalla retroversione dei flettenti a arco allentato, tipica degli archi ricurvi.

Ritorniamo ora sul motivo per cui un arco ricurvo ha prestazioni migliori di un longbow. I flettenti di quest'ultimo, come aveva osservato Hickman, si curvano su se stessi riducendo la loro lunghezza virtuale a 3/4 di quella reale, mentre i flettenti di un ricurvo si 'distendono', ottenendo una lunghezza virtuale prossima a quella reale. Questo prerogativa è stata sfruttata nei cosiddetti 'archi mongoli', riducendo al minimo la lunghezza dell'impugnatura, in modo da ottenere archi piccoli e potenti, adatti per essere utilizzati cavalcando. Invece, nei moderni archi ricurvi, si preferisce avere impugnature sufficientemente lunghe per farvi una 'finestra' che avvicina l'**asse della freccia al piano di scorrimento della corda**.

Una interessante applicazione del nostro modello è stata quella di esplorare la sequenza degli **assetti geometrici** che l'arco assume quando viene teso e quando la freccia viene scoccata. Il risultato di questo lavoro viene mostrato nella Fig.5 dalla quale risulta evidente che il flettente inferiore ruota alquanto di più di quello superiore. Ne consegue che la coda della freccia scoccata percorre una curva tanto accentuata quanto maggiore è l'asimmetria dell'arco.

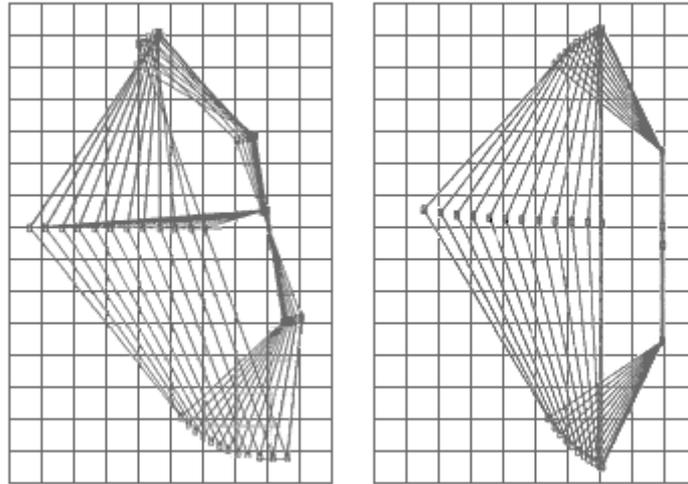


Fig.5 - Simulazione delle variazioni d'assetto in fase di carico (a sinistra) e in fase di scocco (a destra)

UNA PROPOSTA

Ad un progettista che voglia massimizzare l'energia accumulata da un arco, i risultati forniti dal nostro modello suggerirebbero quindi le seguenti indicazioni:

- massimizzare la lunghezza dei bracci virtuali a scapito della lunghezza dell'impugnatura, e quindi ricorrere a flettenti reali molto ricurvi
- disegnare l'impugnatura in modo da abbassare l'altezza della corda senza ridurre l'angolo tra corda e flettente ad arco scarico
- dare ai flettenti il massimo possibile di precarica per aumentare il carico ai valori iniziali d'allungo
- contenere l'angolo tra flettente e corda a fine trazione per ridurre l'innalzamento del carico ai valori finali d'allungo
- avvicinare il più possibile il punto di perno ed il punto di rest alla mezzeria dell'arco per ridurre al minimo l'asimmetria.

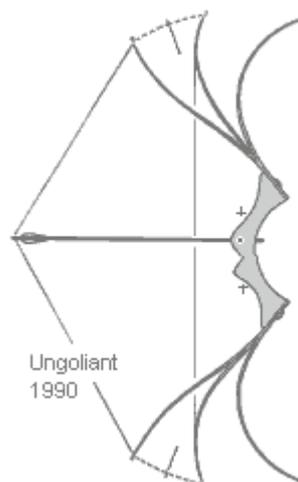


Fig.6 - Progetto di un arco ad elevata energia

Allo scopo di mostrare come l'applicazione di questi criteri possa influire sull'estetica e sulle prestazioni di un arco, abbiamo concepito un ipotetico progetto, qui proposto nella Fig.6, la cui validità è puramente teorica non essendo stata verificata la sua

possibilità di realizzazione in termini di materiali e di stabilità dinamica.

La Fig.7 mostra quali prestazioni di carico e di energia sono prevedibili per questo arco, qualora abbia dimensioni che lo facciano rientrare nella categoria degli archi da campagna, cioè: lunghezza della corda uguale a 59 pollici (1,5 m), carico di trazione all'allungo AMO standard di 28 pollici uguale a 50 libbre (222 newton).

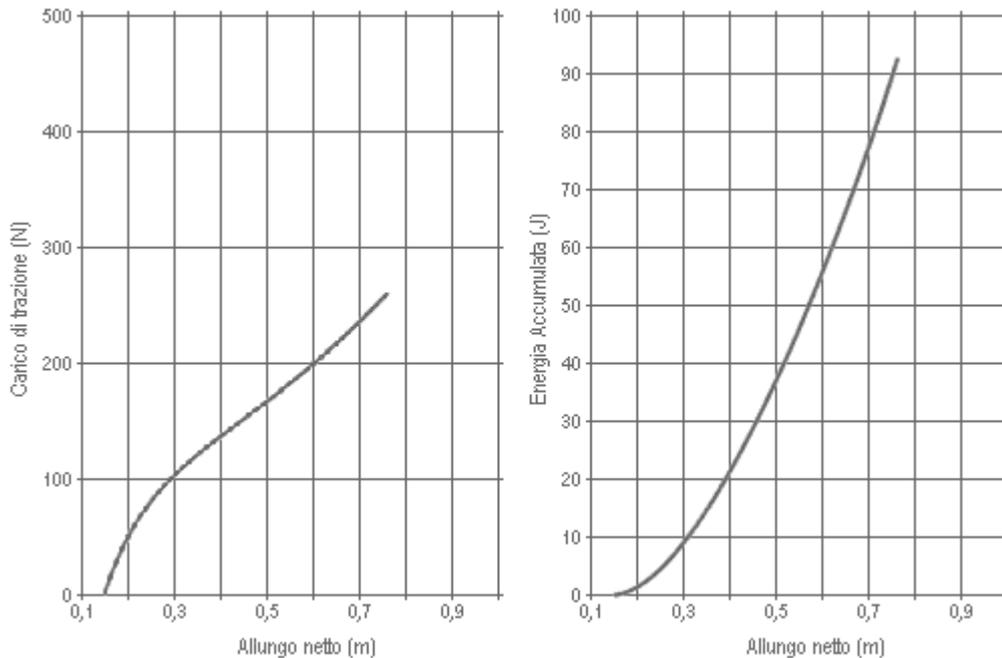


Fig.7 - Curve di carico ed energia calcolate per l'arco della figura 3

Particolarmente interessante è osservare come nella curva di trazione la 'pancia' sia accentuata riducendo la saturazione. E' questo il motivo per cui, all'allungo AMO di 30 pollici, il rapporto tra energia accumulata e carico di trazione di questo arco risulta uguale a 0,34 J/N, cioè circa il 25% in più di un arco tradizionale, comportando una velocità d'uscita della freccia 12% maggiore, a parità di carico sostenuto dall'arciere. Come un buon compound a carrucole.



APPENDICE : Relazioni trigonometriche del modello

Angoli tra bracci e corda

- $\beta' = \arccos [(b'^2 + s'^2 - r'^2 - h^2 + 2 \cdot r' \cdot h \cdot \cos \zeta) / 2 \cdot b' \cdot s']$
- $\beta, = \arccos [(b,^2 + s,^2 - r,^2 - h^2 - 2 \cdot r, \cdot h \cdot \cos \zeta) / 2 \cdot b, \cdot s,]$

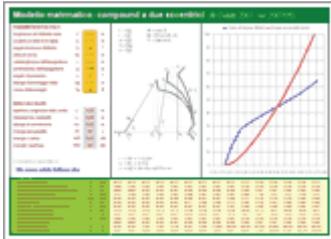
Angoli tra corda e freccia

- $\alpha' = \arccos [(- b'^2 + s'^2 + r'^2 + h^2 - 2 \cdot r' \cdot h \cdot \cos \zeta) / (2 \cdot s' \cdot (r'^2 + h^2 - 2 \cdot r' \cdot h \cdot \cos \zeta)^{1/2})] + \arctan [(r' \cdot \sin \zeta) / (h - r' \cdot \cos \zeta)]$
- $\alpha, = \arccos [(- b,^2 + s,^2 + r,^2 + h^2 + 2 \cdot r, \cdot h \cdot \cos \zeta) / (2 \cdot s, \cdot (r,^2 + h^2 + 2 \cdot r, \cdot h \cdot \cos \zeta)^{1/2})] + \arctan [(r, \cdot \sin \zeta) / (h + r, \cdot \cos \zeta)]$

Angoli dei bracci ad arco teso

- $\theta' = \pi - \arccos [(b'^2 - s'^2 + r'^2 + h^2 - 2 \cdot r' \cdot h \cdot \cos \zeta) / (2 \cdot b' \cdot (r'^2 + h^2 - 2 \cdot r' \cdot h \cdot \cos \zeta)^{1/2})] - \arctan [(h \cdot \sin \zeta) / r' - h \cdot \cos \zeta]$
- $\theta = \pi - \arccos [(b'^2 - s'^2 + r'^2 + h^2 + 2 \cdot r \cdot h \cdot \cos \zeta) / (2 \cdot b \cdot (r'^2 + h^2 + 2 \cdot r \cdot h \cdot \cos \zeta)^{1/2})] - \arctan [(h \cdot \sin \zeta) / r + h \cdot \cos \zeta]$

Con i computer che oggi sono a disposizione di tutti, non è più difficile dare soluzione a equazioni complesse come quella costituita dal sistema generato dalle due ultime formule. E' sufficiente ricorrere ad una procedura iterativa per determinare con precisione quale angolo $\zeta = (B', P, C)$ dia una somma vettoriale **T** delle forze **u'** e **u**, che risulti in direzione del punto di perno, essendo: $u' \cdot \sin \alpha' = u \cdot \sin \alpha$,



modello in: www.outlab.it/doc/outlab_2.xls (Excel 200KB)



Vedere altri documenti da: www.outlab.it